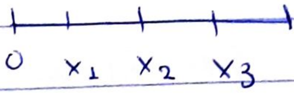
4/04/2019

Απειροστικός ΙΙ

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & , x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

Έστω P $\quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$



$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

$\exists \xi \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow \exists \xi \in [x_{i-1}, x_i]$ τ.ω $f(\xi) = 0$

$f(x) \geq 0 \quad \inf_{[x_{i-1}, x_i]} = 0$

$\exists \{\xi_n\}$ από το $[x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$

τ.ω $\xi_n \to x_0 \Rightarrow f(\xi_n) = \xi_2 \to x_i$

Για $x \in [x_{i-1}, x_i] \quad f(x) \leq x_i$

$\Rightarrow \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = x_i$

$$= \cancel{\sum_{i=1}^{n} (x_{i-1}, x_i)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) x_i \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1})}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup L(f,P) = 0$$

$$\overline{\int_0^1} f = \inf U(f,P) \geq 1/2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f: [\alpha, b] \to \mathbb{R}$, φραγμένη και μονότονη.
Τότε η f είναι ολ/μη

Απόδειξη: Έστω P $0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
μια διαμέριση του $[\alpha, b]$

$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1}) \quad (f(x) \geq f(x_{i-1}) \ \forall \ x \geq x_{i-1})$

Έστω ότι η f είναι αύξουσα (αντιστ. εάν είναι φθίνουσα)

$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i) \qquad x_1 - \alpha = \frac{b-\alpha}{n} \Rightarrow x_1 = \alpha + \frac{b-\alpha}{n}$

$x_2 - x_1 = \frac{b-\alpha}{n} \Rightarrow x_2 = x_1 + \frac{b-\alpha}{n} = \alpha + \frac{2(b-\alpha)}{n}$ *

$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$, $L(f,P) = \sum_{i=1} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$

Παίρνω $P_n = x_i = \alpha + i \frac{b-\alpha}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1, n$

$\left(P_n = \{\alpha, \alpha + \frac{b-\alpha}{n}, \alpha + 2\frac{b-\alpha}{n}, \dots, \alpha + (n-1)\frac{b-\alpha}{n}, b\}\right)$

$\Rightarrow U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-\alpha}{n} f(x_i) = \frac{b-\alpha}{n} \left(f(x_1) + \dots + f(x_n) \right)$

$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-\alpha}{n} f(x_{i-1}) = \frac{b-\alpha}{n} \left(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right)$

$\Rightarrow U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{b-\alpha}{n} \left(f(b) - f(\alpha) \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\xrightarrow{\text{Κριτήριο}}$ f ολ/μη
Riemann

$* \ x_n - x_{n-1} = \frac{b-\alpha}{n} \Rightarrow x_n = \alpha + n\frac{b-\alpha}{n}$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής τότε η f είναι ολοκ/μη

Απόδειξη: η f είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$ η f ομ. συνεχής στο $[\alpha,b]$. Έστω ε>0 $\exists \delta=\delta(\varepsilon)$ τ.ω $\forall x,y\in[\alpha,b]$ με $|x-y|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Έστω $P_n: \alpha=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$

οπου $x_i=\alpha+i\frac{b-\alpha}{n}$ $\left(x_i-x_{i-1}=\frac{b-\alpha}{n}\right)$

$n>\frac{b-\alpha}{\delta}$

$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x)$

$\exists\ x,y\in[x_{i-1},x_i]$

$\inf_{[x_{i-1},x_i]} f = f(y)$

Χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

$x,y\in[x_{i-1},x_i]$

$\Rightarrow |x-y|\le x_i-x_{i-1}$

$= \frac{b-\alpha}{n}<\delta$

$\Rightarrow f(x)-f(y)=|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-\alpha}$

$\Rightarrow U(f,P_n)-L(f(P_n))$

$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\Big(\underbrace{\sup_{[x_{i-1},x_i]} f-\inf_{[x_{i-1},x_i]} f}_{\wedge\ \varepsilon/b-\alpha}\Big)$

$<\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\frac{\varepsilon}{b-\alpha}=\frac{\varepsilon}{b-\alpha}(\underset{b}{\underset{\parallel}{x_n}}-\underset{\alpha}{\underset{\parallel}{x_0}})=\frac{\varepsilon(b-\alpha)}{b-\alpha}\quad \forall n>\frac{b-\alpha}{\delta}$

$\Rightarrow U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$

$\Rightarrow f$ ολ/μη

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εστω $f,g\ [\alpha,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρωσιμες. Τοτε η $f+g$ ειναι ολοκληρωσιμη και $\int_\alpha^b (f(x)+g(x))dx = \int_\alpha^b f(x)dx + \int_\alpha^b g(x)dx$.

Αποδειξη: Εστω $h\ [\alpha,b] \to \mathbb{R}$ ολο/μη $\Rightarrow \underline{\int_\alpha^b} h = \overline{\int_\alpha^b} h = \int_\alpha^b h(x)dx$

Ομως $\underline{\int_\alpha^b} h = \sup_P L(f,P) \geq L(f,P)$, $\forall P$ διαμεριση $[\alpha,b]$ του $[\alpha,b]$ $\overline{\int_\alpha^b} h = \inf_P U(h,P) \leq U(h,P)$ $\forall P$ διαμεριση $[\alpha,b]$

$$\Rightarrow \boxed{L(h,P) \leq \int_\alpha^b h(x)dx \leq U(h,P') \quad \forall P P' \text{ διαμεριση του } [\alpha,b]}$$

- $\inf\{f(x)+g(x) : x\in A\} \geq \inf\{f(x) : x\in A\} + \inf\{g(x) : x\in A\}$

$\sup\{f(x)+g(x) : x\in A\} \leq \sup\{f(x) : x\in A\} + \sup\{g(x) : x\in A\}$

Εστω P μια διαμεριση του $[\alpha,b]$ $P: x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$

$$L(f+g,P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]}[f(x)+g(x)] \geq \cancel{\sum(x_i - x_{i-1})}$$

$$\geq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\left(\inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \inf_{[x_{i-1},x_i]} g\right)$$

$$= L(f,P) + L(g,P)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L(f+g,P) \geq L(f,P)+L(g,P) \\ \hline U(f+g,P) \leq U(f,P)+U(g,P) \end{array}}$$

Έστω $h:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολ/μη $\Rightarrow L(h,P) \leq \int_\alpha^b h(x)dx \leq U(h,P')$

$L(f+g,P) \geq L(f,P)+L(g,P)$

$U(f+g,P) \leq U(f,P)+U(g,P)$

Έστω $\varepsilon>0$ $\xRightarrow[\text{κριτήριο Riemann}]{}$ $\exists$ διαμερίσεις P_1,P_2 του $[\alpha,b]$ τ.ω $U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{4}$

$U(g,P_2)-L(g,P_2)<\frac{\varepsilon}{4}$

$\Rightarrow U(f,P_1)-\frac{\varepsilon}{4} L(f,P_1) \leq \int_\alpha^b f(x)dx$

$U(g,P_2) - \frac{\varepsilon}{4} < L(g,P_2) \leq \int_\alpha^b g(x)dx$

$U(f,P_1)-\frac{\varepsilon}{4} < \int_\alpha^b f(x)dx < L(f,P_1)+\frac{\varepsilon}{4}$

$U(g,P_2)-\frac{\varepsilon}{4} < \int_\alpha^b g(x)dx < L(g,P_2)+\frac{\varepsilon}{4}$